Tentamen Talen en Automaten, 6 november 2006

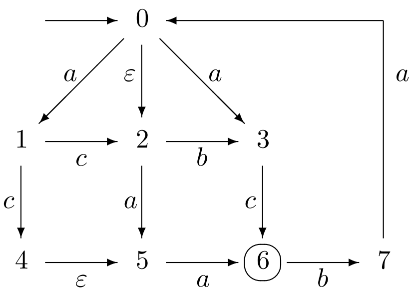
Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek tentamen.

Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen.

Formuleer kort en zakelijk, scherp en zorgvuldig, met steekhoudende argumenten voor de correctheid van je beweringen. Werk netjes. Schrijf duidelijk leesbaar.

Opgave 1 (16 %). Beschouw de ε-NFA A_1 over het alfabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ gegeven in de figuur:

A_1 :



De toestanden zijn genummerd 0 tot en met 7. Toestand 0 is de starttoestand. Toestand 6 is de enige accepterende toestand.
(a) Zet de automaat A_1 volgens het standaardalgoritme om in een deterministische eindige automaat B_1 die dezelfde taal accepteert. Bepaal de bereikbare toestanden van B_1, en de accepterende toestanden van B_1.
(b) Bepaal een reguliere expressie voor de taal van de automaten A_1 en B_1.

Opgave 2 (18 %). Beschouw het alfabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ en de taal L_2 over Σ die bestaat uit de strings waarvan het laatste symbool ook strikt vóór het midden voorkomt: $L_2 = \{xaya \mid x, y \in \Sigma^*, a \in \Sigma : |x| < |y|\}$.
(a) Formuleer het Pomplemma voor *reguliere* talen.
(b) Bewijs dat de taal L_2 niet regulier is.
(c) Bewijs dat de taal L_2 contextvrij is en geef er een contextvrije grammatica voor.

Opgave 3 (16 %). Beschouw de taal L_3 die wordt voortgebracht door de grammatica $G = (V, T, P, S)$ met de alfabetten $V = \{A, B, C, D, S\}$ en $T = \{a, b, c, d\}$ en de productieregels

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & bA \mid BB \\
A & \rightarrow & aA \mid AbD \\
B & \rightarrow & \varepsilon \mid AS \mid cCc \\
C & \rightarrow & B \mid aC \mid Sd \\
D & \rightarrow & \varepsilon \mid dD\ .
\end{array}
$$

Leid uit G een grammatica G' af, die geen overbodige (*useless*) symbolen bevat en ook geen ε-producties bevat en waarvoor geldt dat $L(G') = L_3 - \{\varepsilon\}$.

Opgave 4 (16 %). Gegeven is de taal L_4 over het alfabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ die bestaat uit de strings $w \in \Sigma^*$ die meer nullen dan enen bevatten. Schrijven we dus $cnt(a, w)$ voor het aantal voorkomens van symbool a in string w, dan is

$$L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid cnt(0, w) > cnt(1, w)\}\ .$$

(a) Ontwerp een stapelautomaat P_4 die de taal L_4 accepteert bij lege stapel, dwz. met $L_4 = N(P_4)$. Licht toe waarom je oplossing correct is.
(b) Bewijs (bv. hiermee) dat L_4 een contextvrije taal is.

Z.O.Z.

Opgave 5 (16 %). Ontwerp een Turing machine M met invoeralfabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die zijn invoerstring w opvat als een binaire codering van een natuurlijk getal n, en n met 1 verlaagt.

Als de invoer een rijen nullen is, zodat $n = 0$, moet M de invoer verwerpen. Anders dient executie van M te eindigen in een accepterende toestand, terwijl de band een binaire codering van $n - 1$ bevat en de leeskop op het minst signifikante bit van deze codering van $n-1$ staat. Geef het volledige zeventupel van M, en geef de overgangsfunctie δ van M in tabelvorm.

Opgave 6 (18 %). Alle (deterministische eenbands) Turing machines met invoeralfabet $\Sigma = \{0, 1\}$ kunnen gecodeerd worden in de taal *Ctm* die bepaald wordt door de reguliere expressie $((\mathbf{0}^+\mathbf{1})^5\mathbf{1})^+\mathbf{1}$. We schrijven $D(m)$ voor de Turing machine die door $m \in \mathit{Ctm}$ gecodeerd wordt. Het boek gebruikt dit voor de constructie van de universele taal

$$L_u = \{mv \mid m \in \mathit{Ctm}, v \in \Sigma^* : v \in L(D(m))\} \ .$$

(a) Is L_u recursief opsombaar? Wat betekent dit?
(b) Is L_u beslisbaar (d.i. recursief)? Wat betekent dit?
Er worden in (a) en (b) geen bewijzen gevraagd.

We beschouwen nu hiernaast de taal

$$L_{term} = \{mv \mid m \in \mathit{Ctm}, v \in \Sigma^* : D(m) \text{ eindigt bij invoer } v\} \ .$$

(c) Is L_{term} recursief opsombaar?
(d) Is L_{term} beslisbaar (d.i. recursief)?
Bewijs je beweringen in (c) en (d) met behulp van je antwoorden van (a) en (b).